



TITLE:

作用素平均に関連した不等式について(作用素の不等式とその周辺)

AUTHOR(S):

久保, 文夫

CITATION:

久保, 文夫. 作用素平均に関連した不等式について(作用素の不等式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1983, 500: 80-110

ISSUE DATE:

1983-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103665>

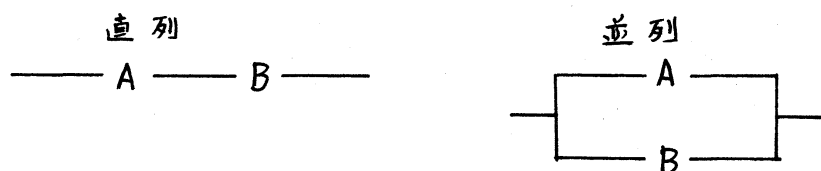
RIGHT:

作用素平均に関連した不等式について

富山大 理 久保文夫

(Fumio Kubo)

ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の非負定値 (有界線型) 作用素の組 A, B を考えます. A および B をそれぞれ, インピーダンスに持つような回路を直列あるいは並列に接続した回路のインピーダンスはそれぞれ, 作用素の和 $A+B$ および並列和 $A:B$ で与えられます. ここに, 非負定値



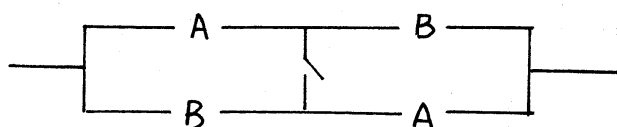
作用素の並列和は次のような 極値問題 (Maxwell の原理) の解として与えられます:

$$\langle (A:B)x | x \rangle = \inf_{y \in \mathcal{H}} \{ \langle A(x+y) | x+y \rangle + \langle By | y \rangle \}$$

このように接続された回路の消費エネルギーの間の大小関係のうち最も良く知られているのは

$$(1/2)(A+B) \geq 2(A:B)$$

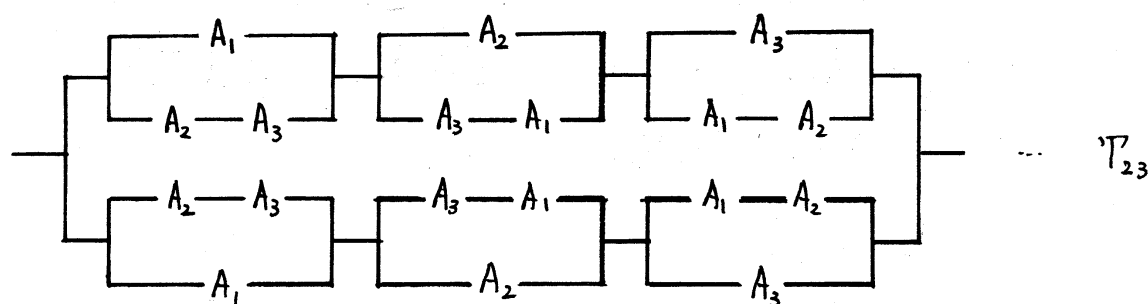
ですが、これは算術、調和の平均の間に成立つ等式の一般化であり、回路的には次のスイッチを閉じた時 ($2(A:B)$) より開いた時 ($(1/2)(A+B)$) の方が消費エネルギーが大きいことを示しています。

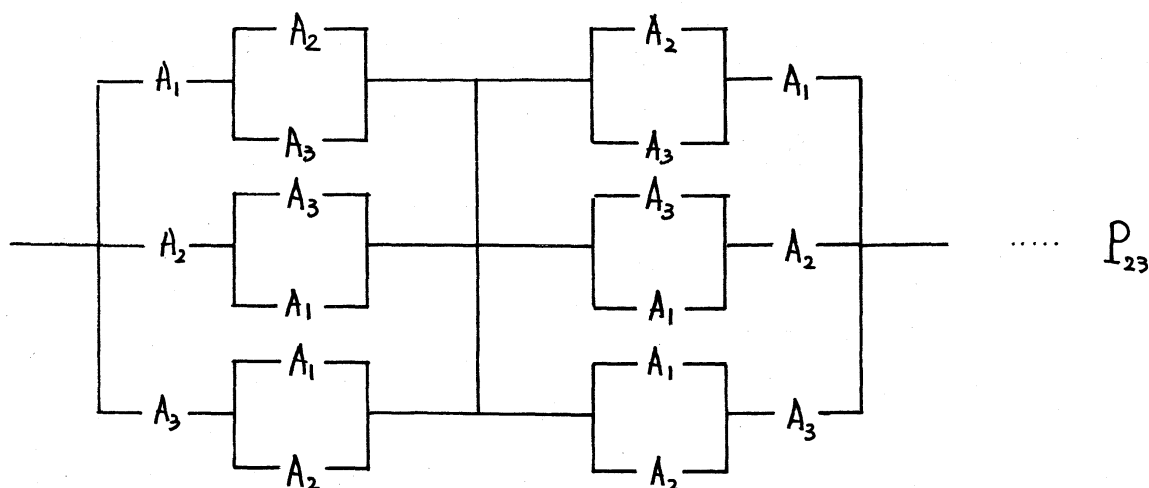


並列和も通常の和と同様に、結合律を満すので、この n 変数への拡張は自然に行われます。また Duffin school の人達によつてこうした研究は自然、その対称性に注目したものに拘り、Anderson, Morley, Trapp 達は和と並列和即ち直列接続と並列接続とを組み合わせたいろいろな平均を帰納的に定義しました。例えば A_1, A_2, A_3 を3つの非負定値作用素とする時、次のように定義される作用素をインピーダンスに持つ回路を考えます。

$$\mathcal{T}_{23} = (1/2) [\{A_1 : (A_2 + A_3)\} + \{A_2 : (A_3 + A_1)\} + \{A_3 : (A_1 + A_2)\}]$$

$$\mathcal{P}_{23} = 2 [\{A_1 + (A_2 : A_3)\} : \{A_2 + (A_3 : A_1)\} : \{A_3 + (A_1 : A_2)\}]$$





この二つの接続のしかたは，単なる抵抗となる， A_1, A_2, A_3 が 正の実数の場合には，回路のデルタ・スター変換により等価ですが，一般には，エネルギー不等式

$$\mathcal{P}_{23} \geq P_{23}$$

が成立します． この不等式は 安藤と Anderson, Morley, Trapp により独立に異なった証明が与えられています． またこの証明は不等式 $\mathcal{P}_{2m} \geq P_{m-1, m}$ を証明すべく拡張することが可能です． 上の作用素は $\mathcal{P}_{13} = P_{13} = (1/3)(A_1 + A_2 + A_3)$ 及び $\mathcal{P}_{33} = P_{33} = 3(A_1 : A_2 : A_3)$ と一組になって不等式の完全系

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_{13} & \geq & \mathcal{P}_{23} & \geq & \mathcal{P}_{33} \\ \parallel & & \text{IV} & & \parallel \\ P_{13} & \geq & P_{23} & \geq & P_{33} \end{array}$$

を満します． 安藤は更に4個の非負定値作用素のつくる，こ

のような平均の間の不等式の完全系を証明しました。

本講演では、5個の非負定値作用素のつく次のような平均の間の不等式を証明します。

$$\begin{aligned}
 & {}^3T_{35} \\
 = & (A_1 : (1/2) ((A_2 : (A_3 + A_4 + A_5)) + (A_3 : (A_4 + A_5 + A_2)) + (A_4 : (A_5 + A_2 + A_3)) + (A_5 : (A_2 + A_3 + A_4)))) \\
 & + (A_2 : (1/2) ((A_3 : (A_4 + A_5 + A_1)) + (A_4 : (A_5 + A_1 + A_3)) + (A_5 : (A_1 + A_3 + A_4)) + (A_1 : (A_3 + A_4 + A_5)))) \\
 & + (A_3 : (1/2) ((A_4 : (A_5 + A_1 + A_2)) + (A_5 : (A_1 + A_2 + A_4)) + (A_1 : (A_2 + A_4 + A_5)) + (A_2 : (A_4 + A_5 + A_1)))) \\
 & + (A_4 : (1/2) ((A_5 : (A_1 + A_2 + A_3)) + (A_1 : (A_2 + A_3 + A_5)) + (A_2 : (A_3 + A_5 + A_1)) + (A_3 : (A_5 + A_1 + A_2)))) \\
 & + (A_5 : (1/2) ((A_1 : (A_2 + A_3 + A_4)) + (A_2 : (A_3 + A_4 + A_1)) + (A_3 : (A_4 + A_1 + A_2)) + (A_4 : (A_1 + A_2 + A_3))))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P_{35}/3 \\
 = & (A_1 + 2((A_2 + (A_3 : A_4 : A_5)) : (A_3 + (A_4 : A_5 : A_2)) : (A_4 + (A_5 : A_2 : A_3)) : (A_5 + (A_2 : A_3 : A_4)))) \\
 & : (A_2 + 2((A_3 + (A_4 : A_5 : A_1)) : (A_4 + (A_5 : A_1 : A_3)) : (A_5 + (A_1 : A_3 : A_4)) : (A_1 + (A_3 : A_4 : A_5)))) \\
 & : (A_3 + 2((A_4 + (A_5 : A_1 : A_2)) : (A_5 + (A_1 : A_2 : A_4)) : (A_1 + (A_2 : A_4 : A_5)) : (A_2 + (A_4 : A_5 : A_1)))) \\
 & : (A_4 + 2((A_5 + (A_1 : A_2 : A_3)) : (A_1 + (A_2 : A_3 : A_5)) : (A_2 + (A_3 : A_5 : A_1)) : (A_3 + (A_5 : A_1 : A_2)))) \\
 & : (A_5 + 2((A_1 + (A_2 : A_3 : A_4)) : (A_2 + (A_3 : A_4 : A_1)) : (A_3 + (A_4 : A_1 : A_2)) : (A_4 + (A_1 : A_2 : A_3))))
 \end{aligned}$$

定理 $T_{35} \geq P_{35}$

証明 和も並列和も共に上半連続性を持つので、作用素 A_i ($i=1,2,\dots,5$) はそれぞれ有界な逆作用素を持つと仮定して十分である。また Anderson, Morley, Trapp により

$$T_{35}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_5^{-1}) = P_{35}(A_1, A_2, \dots, A_5)^{-1}$$

が知られているので Schwarz の不等式より

$\langle T_{35}(A_1, \dots, A_5) x | x \rangle + \langle T_{35}(A_1^{-1}, \dots, A_5^{-1}) y | y \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle|$
 が任意のベクトル $x, y \in \mathcal{H}$ に対して成立することを示せば十分である.

並列和の極値表現に従って $3\langle T_{35}(A_1, \dots, A_5) x | x \rangle$ を
 次の25個のベクトル x_i, x_{ij} ($1 \leq i, j \leq 5, i \neq j$) によっ
 ての次の量の infimum としてあらわす.

$$\begin{aligned} & \langle A_1(x+x_1) | x+x_1 \rangle + (1/2) [\langle A_2(x_1+x_{12}) | x_1+x_{12} \rangle + \langle A_3 x_{12} | x_{12} \rangle \\ & \quad + \langle A_4 x_{12} | x_{12} \rangle \\ & \quad + \langle A_5 x_{12} | x_{12} \rangle \\ & \quad + \langle A_3(x_1+x_{13}) | x_1+x_{13} \rangle + \langle A_4 x_{13} | x_{13} \rangle \\ & \quad + \langle A_5 x_{13} | x_{13} \rangle \\ & \quad + \langle A_2 x_{13} | x_{13} \rangle \\ & \quad + \langle A_4(x_1+x_{14}) | x_1+x_{14} \rangle + \langle A_5 x_{14} | x_{14} \rangle \\ & \quad + \langle A_2 x_{14} | x_{14} \rangle \\ & \quad + \langle A_3 x_{14} | x_{14} \rangle \\ & \quad + \langle A_5(x_1+x_{15}) | x_1+x_{15} \rangle + \langle A_2 x_{15} | x_{15} \rangle \\ & \quad + \langle A_3 x_{15} | x_{15} \rangle \\ & \quad + \langle A_4 x_{15} | x_{15} \rangle] \\ & + \langle A_2(x+x_2) | x+x_2 \rangle + (1/2) [\langle A_3(x_2+x_{23}) | x_2+x_{23} \rangle + \langle A_4 x_{23} | x_{23} \rangle \\ & \quad + \langle A_5 x_{23} | x_{23} \rangle \\ & \quad + \langle A_1 x_{23} | x_{23} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle A_4 (\lambda_2 + \lambda_{24}) | \lambda_2 + \lambda_{24} \rangle + \langle A_5 \lambda_{24} | \lambda_{24} \rangle \\
& \quad + \langle A_1 \lambda_{24} | \lambda_{24} \rangle \\
& \quad + \langle A_3 \lambda_{24} | \lambda_{24} \rangle \\
& + \langle A_5 (\lambda_2 + \lambda_{25}) | \lambda_2 + \lambda_{25} \rangle + \langle A_1 \lambda_{25} | \lambda_{25} \rangle \\
& \quad + \langle A_3 \lambda_{25} | \lambda_{25} \rangle \\
& \quad + \langle A_4 \lambda_{25} | \lambda_{25} \rangle \\
& + \langle A_1 (\lambda_2 + \lambda_{21}) | \lambda_2 + \lambda_{21} \rangle + \langle A_3 \lambda_{21} | \lambda_{21} \rangle \\
& \quad + \langle A_4 \lambda_{21} | \lambda_{21} \rangle \\
& \quad + \langle A_5 \lambda_{21} | \lambda_{21} \rangle]
\end{aligned}$$

+ - - - - -

$$\begin{aligned}
& + \langle A_5 (\lambda + \lambda_5) | \lambda + \lambda_5 \rangle + (1/2) [\langle A_1 (\lambda_5 + \lambda_{51}) | \lambda_5 + \lambda_{51} \rangle + \langle A_2 \lambda_{51} | \lambda_{51} \rangle \\
& \quad + \langle A_3 \lambda_{51} | \lambda_{51} \rangle \\
& \quad + \langle A_4 \lambda_{51} | \lambda_{51} \rangle \\
& + \langle A_2 (\lambda_5 + \lambda_{52}) | \lambda_5 + \lambda_{52} \rangle + \langle A_3 \lambda_{52} | \lambda_{52} \rangle \\
& \quad + \langle A_4 \lambda_{52} | \lambda_{52} \rangle \\
& \quad + \langle A_1 \lambda_{52} | \lambda_{52} \rangle \\
& + \langle A_3 (\lambda_5 + \lambda_{53}) | \lambda_5 + \lambda_{53} \rangle + \langle A_4 \lambda_{53} | \lambda_{53} \rangle \\
& \quad + \langle A_1 \lambda_{53} | \lambda_{53} \rangle \\
& \quad + \langle A_2 \lambda_{53} | \lambda_{53} \rangle \\
& + \langle A_4 (\lambda_5 + \lambda_{54}) | \lambda_5 + \lambda_{54} \rangle + \langle A_1 \lambda_{54} | \lambda_{54} \rangle \\
& \quad + \langle A_2 \lambda_{54} | \lambda_{54} \rangle
\end{aligned}$$

$$+ \langle A_3 x_{34} | x_{54} \rangle]$$

同様に $3 \langle T_{35} (A_1^{-1}, \dots, A_5^{-1}) y | y \rangle$ と 25個のベクトル y_i, y_{ij} ($1 \leq i, j \leq 5, i \neq j$) についての同様の量 (A_i を A_i^{-1} に x_i を y_i に x_{ij} を y_{ij} に置きかえたもの) の infimum としてあらわす. 従ってこの2つの量の和の2倍が

$$\geq 2 \cdot 3 \cdot 2 |\langle x | y \rangle|$$

なることを示せば十分である. このベクトル (50個の) についての極値問題は視点を変えると \mathbb{R} 上の2つの量の和 (の2倍) の正定値作用素 A_i ($1 \leq i \leq 5$) についての infimum が $\geq 12 |\langle x | y \rangle|$ である \mathbb{R} という作用素についての極値問題に変換できる. これは次に示すような5個の Gram 行列 M_i ($1 \leq i \leq 5$) の trace norm

$$\|M_i\| = \text{tr}[(M_i^* M_i)^{1/2}]$$

の和について

$$2 \sum_{i=1}^5 \|M_i\| \geq 12 |\langle x | y \rangle|$$

を主張することに他ならないことが Flanders の定理によりわかる. ここで Gram 行列 $\begin{bmatrix} \langle x_1 | y_1 \rangle & \langle x_1 | y_2 \rangle \\ \langle x_2 | y_1 \rangle & \langle x_2 | y_2 \rangle \end{bmatrix}$ を

$G \left(\begin{array}{c|c} x_1 & y_1 \\ \hline x_2 & y_2 \end{array} \right)$ のようにあらわすと決めておくと, 行列 M_i は表1

のように与えられる 17×17 行列である.

$$\begin{array}{l}
 M_1 = G \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{2}(\lambda + \lambda_1) & \sqrt{2}(\gamma + \gamma_1) \\ \hline \lambda_2 + \lambda_{21} & \gamma_2 + \gamma_{21} \\ \lambda_3 + \lambda_{31} & \gamma_3 + \gamma_{31} \\ \lambda_4 + \lambda_{41} & \gamma_4 + \gamma_{41} \\ \lambda_5 + \lambda_{51} & \gamma_5 + \gamma_{51} \\ \lambda_{23} & \gamma_{23} \\ \lambda_{24} & \gamma_{24} \\ \lambda_{25} & \gamma_{25} \\ \lambda_{34} & \gamma_{34} \\ \lambda_{35} & \gamma_{35} \\ \lambda_{32} & \gamma_{32} \\ \lambda_{45} & \gamma_{45} \\ \lambda_{42} & \gamma_{42} \\ \lambda_{43} & \gamma_{43} \\ \lambda_{52} & \gamma_{52} \\ \lambda_{53} & \gamma_{53} \\ \lambda_{54} & \gamma_{54} \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 M_2 = G \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{2}(\lambda + \lambda_2) & \sqrt{2}(\gamma + \gamma_2) \\ \hline \lambda_1 + \lambda_{12} & \gamma_1 + \gamma_{12} \\ \lambda_3 + \lambda_{32} & \gamma_3 + \gamma_{32} \\ \lambda_4 + \lambda_{42} & \gamma_4 + \gamma_{42} \\ \lambda_5 + \lambda_{52} & \gamma_5 + \gamma_{52} \\ \lambda_{13} & \gamma_{13} \\ \lambda_{14} & \gamma_{14} \\ \lambda_{15} & \gamma_{15} \\ \lambda_{34} & \gamma_{34} \\ \lambda_{35} & \gamma_{35} \\ \lambda_{31} & \gamma_{31} \\ \lambda_{45} & \gamma_{45} \\ \lambda_{41} & \gamma_{41} \\ \lambda_{43} & \gamma_{43} \\ \lambda_{51} & \gamma_{51} \\ \lambda_{53} & \gamma_{53} \\ \lambda_{54} & \gamma_{54} \end{array} \right)
 \end{array}$$

(表 1)

$$M_3 = G \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{2}(\lambda + \lambda_3) & \sqrt{2}(\gamma + \gamma_3) \\ \hline \lambda_1 + \lambda_{13} & \gamma_1 + \gamma_{13} \\ \lambda_2 + \lambda_{23} & \gamma_2 + \gamma_{23} \\ \lambda_4 + \lambda_{43} & \gamma_4 + \gamma_{43} \\ \lambda_5 + \lambda_{53} & \gamma_5 + \gamma_{53} \\ \lambda_{12} & \gamma_{12} \\ \lambda_{14} & \gamma_{14} \\ \lambda_{15} & \gamma_{15} \\ \lambda_{24} & \gamma_{24} \\ \lambda_{25} & \gamma_{25} \\ \lambda_{21} & \gamma_{21} \\ \lambda_{45} & \gamma_{45} \\ \lambda_{41} & \gamma_{41} \\ \lambda_{42} & \gamma_{42} \\ \lambda_{51} & \gamma_{51} \\ \lambda_{52} & \gamma_{52} \\ \lambda_{54} & \gamma_{54} \end{array} \right]$$

$$M_4 = G \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{2}(\lambda + \lambda_4) & \sqrt{2}(\gamma + \gamma_4) \\ \hline \lambda_1 + \lambda_{14} & \gamma_1 + \gamma_{14} \\ \lambda_2 + \lambda_{24} & \gamma_2 + \gamma_{24} \\ \lambda_3 + \lambda_{34} & \gamma_3 + \gamma_{34} \\ \lambda_5 + \lambda_{54} & \gamma_5 + \gamma_{54} \\ \lambda_{12} & \gamma_{12} \\ \lambda_{13} & \gamma_{13} \\ \lambda_{15} & \gamma_{15} \\ \lambda_{23} & \gamma_{23} \\ \lambda_{25} & \gamma_{25} \\ \lambda_{21} & \gamma_{21} \\ \lambda_{35} & \gamma_{35} \\ \lambda_{31} & \gamma_{31} \\ \lambda_{32} & \gamma_{32} \\ \lambda_{51} & \gamma_{51} \\ \lambda_{52} & \gamma_{52} \\ \lambda_{53} & \gamma_{53} \end{array} \right]$$

(表 1) continued

$$M_5 = G \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{2}(\lambda + \lambda_5) & \sqrt{2}(\eta + \eta_5) \\ \hline \lambda_1 + \lambda_{15} & \eta_1 + \eta_{15} \\ \lambda_2 + \lambda_{25} & \eta_2 + \eta_{25} \\ \lambda_3 + \lambda_{35} & \eta_3 + \eta_{35} \\ \lambda_4 + \lambda_{45} & \eta_4 + \eta_{45} \\ \lambda_{12} & \eta_{12} \\ \lambda_{13} & \eta_{13} \\ \lambda_{14} & \eta_{14} \\ \lambda_{23} & \eta_{23} \\ \lambda_{24} & \eta_{24} \\ \lambda_{21} & \eta_{21} \\ \lambda_{34} & \eta_{34} \\ \lambda_{31} & \eta_{31} \\ \lambda_{32} & \eta_{32} \\ \lambda_{41} & \eta_{41} \\ \lambda_{42} & \eta_{42} \\ \lambda_{43} & \eta_{43} \end{array} \right)$$

(表 1) continued.

$$M = \sum_{i=1}^5 M_i \text{ とおくと}$$

1 ルールの三角不等式より,

$$2 \|M\| \geq 12 |\langle \lambda | \eta \rangle|$$

を示せば十分である. 更に

trace norm による duality

$$\|M\| = \sup_{\|S\|_\infty \leq 1} |\text{tr}(S^* M)|;$$

(但し $\|S\|_\infty$ は行列 S の spectral norm ($S^* S$ の最大固有値)^{1/2} とする)

より 次のような 17×17 行列

$$S = [S_{ij}] \text{ を求めればよいこと}$$

になる:

$$|\text{tr}(S^* M)| \geq 6 \|S\|_\infty |\langle \lambda | \eta \rangle|.$$

$\text{tr}(S^* M)$ に対し λ_i ,

$$\lambda_{ij}, \eta_i, \eta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 5, i \neq j)$$

を含む内積を消去すべく S

を選ぶ (表 2). 明らかに

$$S^* = S \text{ となり, 計算により,}$$

$$\text{tr}(S^* M) = 120 \langle \lambda | \eta \rangle$$

は容易に得られる. 従って

S の spectral norm $\|S\|_\infty$ による

$$\|S\|_\infty = 20 \text{ を示せば}$$

十分である。以下はこの計算のためのものである。 鑑

次の(表3) は 行列 S^2 を与えているが、これは
行列 S の第一列が固有値 20 に属する固有ベクトルであるこ
とを示している。従って次の2つの不等式を示せば十分で
ある：
 $20I_{17} - S \geq 0 \quad S + 20I_{17} \geq 0$

(注) この2つの行列に対して Sylvester の
定理によつて左上の 1×1 minor から順次
右と下との一列一行を増してつづつた
minor が全て $(\geq) 0$ であることを示せば
よいが、(表4)の Basic プログラムの実行
結果からわかるように実用的でない。

(TOSHIBA IHC 8000, 16Kビット仕様
による)。従つて部分的に対角化して
Schur complement を作つてゆき、行列の
要素は大きくせず行列のサイズを落して
ゆく方法をとる。

I) $20I - S$ (表5) について。

1°	2 行 (列)	に	6, 7, 8 行 (列)	を加える	} (表 6)
2°	3	"	9, 10, 11	"	
3°	4	"	12, 13, 14	"	
4°	5	"	15, 16, 17	"	
5°					

2° (表6) の左上の $\text{diag}(8, 80, 80, 80, 80)$ で Schur complement をとり, 4倍する(表7)

3° (表7) の 12×12 行列は (これを F とおく) 全ての行列和が0だから $\det(20I - S) = 0$. $20I - S$ の非負定値性は F の非負定値性と同値だから, F から 17 行列) を除いた $F(17)$ の非負定値性を言えば十分.

4° $F(17)$ の 6 行列) に 11 行列) を加える

7		13	
8		15	
9	"	14	"
11		12	
13		16	
14		15	

..... (表 8)

5° (表8) の

7		10	
8	"	9	"
13		14	

..... (表 9)

6° 7, 8 行列) は全て0だから除いて $\text{diag}(100, 100, 100)$ で Schur complement をとり, 4で割ると次の 6×6 行列を得る.

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

左上からの minor を順次
求めると 12, 36, 576,
4608, 12288, 32768 と

なり, この 6×6 行列が正定値であることがわかる.

II) $S + 20I$ (表 10) について.

1° 2 行 (列) に 6, 7, 8 行 (列) を加える
 3 " 9, 10, 11 "
 4 " 12, 13, 14 "
 5 " 15, 16, 17 " } (表 11)

2° (表 11) の左上の $\text{diag} (32, 80, 80, 80, 80)$ について Schur complement をとり 16 倍する (表 12)

3° (表 12) の 6 行 (列) に 11 行 (列) を加える
 7 13
 8 15
 9 " 14 "
 10 16
 12 17 } (表 13)

4° (表 13) の 6 行 (列) から 12 行 (列) を引く
 7 10
 8 " "
 8 9 } (表 14)

5° (表 14) の左上の $\text{diag} (320, 320, 320)$ について Schur complement をとり (表 15)

6° (表 15) の 9 行 (列) から 14, 15 行 (列) を引く
 10 13 16
 12 " 11 17 } (表 16)

7° (表16)の 9行(列)に10行(列)を加える ---- (表17)

8° (表17)の 9行(列)は全て0だから除き, 11行(列)と12行(列)を入れ替える. ---- (表18)

9° (表18)の左上 $\text{diag}(192, 192)$ について Schur complement をとる ---- (表19)

10° (表19)の 14行(列)から15行(列)を引く
 12 " 13 を加える
 17 " 16 " } ---- (表20)

11° (表20)の 12行(列)から17行(列)を引くと次の
 4×4行列を得る. 左上からの minor を順次求めると

$$\begin{bmatrix} 163 & -45 & 67 & 70 \\ -45 & 115 & -45 & -90 \\ 67 & -45 & 163 & 70 \\ 70 & -90 & 70 & 140 \end{bmatrix}$$

163, 16720, 2150400, 1228800 となりこの4×4
 行列が正定値であることがわかる. (証明終り)

(注意) 短期共同研究終了後数日して, 北大応電研の
 中村美浩氏より, 行列Sの固有値全てと固有ベクトルの表が
 送られて来ました. それによっても $\|S\|_{\infty} = 20$ がわかる
 ことを付け加えます.

The matrix S.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
2	$-3\sqrt{2}$	-6	4	4	4	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3
3	$-3\sqrt{2}$	4	-6	4	4	-2	-3	-3	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3
4	$-3\sqrt{2}$	4	4	-6	4	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	-3	-3	-3	2
5	$-3\sqrt{2}$	4	4	4	-6	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	2
6	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	2	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6
7	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-2	2	-2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2
8	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-2	-2	2	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1
9	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-1	-2	6	2	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2
10	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-1	6	-2	-2	2	-2	-2	6	-1	-1	0	-1
11	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	0	-1	-1	-2	-2	2	6	-2	-1	-2	-1	6
12	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-1	-2	-1	-2	6	2	-2	-2	-1	-1	0
13	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	2	-2	-2	6	-1
14	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	2	6	-2	-1
15	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6	2	-2	-2
16	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	2	-2
17	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	2

(表 2)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	240	-60r2	-60r2	-60r2	-60r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2
2	-60r2	180	-20	-20	-20	-60	-60	-60	40	40	-60	40	-60	40	-60	40	40
3	-60r2	-20	180	-20	-20	-60	40	40	-60	-60	-60	40	40	-60	40	-60	40
4	-60r2	-20	-20	180	-20	40	-60	40	-60	40	40	-60	-60	-60	40	40	-60
5	-60r2	-20	-20	-20	180	40	40	-60	40	-60	40	-60	40	40	-60	-60	-60
6	20r2	-60	-60	40	40	124	-40	-40	-28	-28	116	20	-28	-32	-28	-32	20
7	20r2	-60	40	-60	40	-40	124	-40	-32	20	-28	-28	116	-28	-28	20	-32
8	20r2	-60	40	40	-60	-40	-40	124	20	-32	-28	-32	-28	20	116	-28	-28
9	20r2	40	-60	-60	40	-28	-32	20	124	-40	-40	-28	-28	116	20	-28	-32
10	20r2	40	-60	40	-60	-28	20	-32	-40	124	-40	-32	20	-28	-28	116	-28
11	20r2	-60	-60	40	40	116	-28	-28	-40	-40	124	20	-32	-28	-32	-28	20
12	20r2	40	40	-60	-60	20	-28	-32	-28	-32	20	124	-40	-40	-28	-28	116
13	20r2	-60	40	-60	40	-28	116	-28	-28	20	-32	-40	124	-40	-32	20	-28
14	20r2	40	-60	-60	40	-32	-28	20	116	-28	-28	-40	-40	124	20	-32	-28
15	20r2	-60	40	40	-60	-28	-28	116	20	-28	-32	-28	-32	20	124	-40	-40
16	20r2	40	-60	40	-60	-32	20	-28	-28	116	-28	-28	20	-32	-40	124	-40
17	20r2	40	40	-60	-60	20	-32	-28	-32	-28	20	116	-28	-28	-40	-40	124

(表 3)

```

100  N=17
110  DIM A(N,N), B(N)
120  FOR I=1 TO N
130  FOR J=1 TO N
140  READ A(I,J)
150  NEXT J
160  NEXT I
170  L=1:K=2
180  X1=1
190  IF A(L,L)=0 THEN L1=L+1:GOTO 360
200  Y=A(L,L)
210  FOR J=L TO N
220  A(L,J)=A(L,J)/Y
230  NEXT J
240  FOR I=K TO N
250  X=A(I,L)
260  FOR J=K TO N
270  A(I,J)=A(I,J)-A(L,J)*X
280  NEXT J:NEXT I
290  L=L+1
300  K=K+1
310  X1=X1*Y
320  IF L<N THEN 190
330  X1=X1*A(N,N)
340  LPRINT "DET=";X1
350  END
360  IF L1>N THEN 440
370  IF A(L1,L)=0 THEN L1=L1+1:GOTO 360
380  FOR J=L TO N
390  B(J)=A(L1,J)
400  A(L1,J)=A(L,J)
410  A(L,J)=-B(J)
420  NEXT J
430  GOTO 200
440  X1=0:GOTO 340

```

20-S を A と読ませた結果は

DET=-1.762299094_E-09

となるが、後じ示す通り真の値は 0 である。これは $\sqrt{2}$ を有理近似した時の誤差に加えて、途中の丸め誤差のためと思われる。

このように数値実験では実用性に乏しい。

(表 4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1						$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	8	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
3	$3\sqrt{2}$	26	-4	-4	-4	-2	-2	-2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	$3\sqrt{2}$	-4	26	-4	-4	-2	3	3	-2	-2	-2	3	3	-2	3	-2	3
5	$3\sqrt{2}$	-4	-4	26	-4	3	-2	-2	3	3	3	-2	-2	3	3	3	-2
6	$-\sqrt{2}$	-2	-2	3	3	18	2	2	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6
7	$-\sqrt{2}$	-2	3	-2	3	2	18	2	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2
8	$-\sqrt{2}$	-2	3	3	-2	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1
9	$-\sqrt{2}$	3	-2	-2	3	1	2	-6	18	2	2	1	1	0	-6	1	2
10	$-\sqrt{2}$	3	-2	3	-2	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1	1	0	1
11	$-\sqrt{2}$	-2	-2	3	3	0	1	1	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6
12	$-\sqrt{2}$	3	3	-2	-2	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2	1	1	0
13	$-\sqrt{2}$	-2	3	-2	3	1	0	1	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1
14	$-\sqrt{2}$	3	-2	-2	3	2	1	-6	0	1	1	2	2	18	-6	2	1
15	$-\sqrt{2}$	-2	3	3	-2	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2
16	$-\sqrt{2}$	3	-2	3	-2	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2	2	18	2
17	$-\sqrt{2}$	3	3	-2	-2	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1	2	2	18

(表 5)

	1	2 $+b+7+8$	3 $+9+10+11$	4 $+12+13+14$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	8	0	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	0	80	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	80	0	0	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20	0	0	0
5	0	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20
6	$-\sqrt{2}$	20	0	0	0	18	2	2	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6
7	$-\sqrt{2}$	20	0	0	0	2	18	2	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2
8	$-\sqrt{2}$	20	0	0	0	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1
9	$-\sqrt{2}$	0	20	0	0	1	2	-6	18	2	2	1	1	0	-6	1	2
10	$-\sqrt{2}$	0	20	0	0	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1	1	0	1
11	$-\sqrt{2}$	0	20	0	0	0	1	1	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6
12	$-\sqrt{2}$	0	0	20	0	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2	1	1	0
13	$-\sqrt{2}$	0	0	20	0	1	0	1	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1
14	$-\sqrt{2}$	0	0	20	0	2	1	-6	0	1	1	2	2	18	-6	2	1
15	$-\sqrt{2}$	0	0	0	20	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2
16	$-\sqrt{2}$	0	0	0	0	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2	2	18	2
17	$-\sqrt{2}$	0	0	0	20	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1	2	2	18

(表6)

19

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7						51	-13	-13	3	3	-1	-25	3	7	3	7	-25
8						-13	51	-13	7	-25	3	3	-1	3	3	-25	7
9						-13	-13	51	-25	7	3	7	3	-25	-1	3	3
10						3	7	-25	51	-13	-13	3	3	-1	-25	3	7
11						3	-25	7	-13	51	-13	7	-25	3	3	-1	3
12						-1	3	3	-13	-13	51	-25	7	3	7	3	-25
13						-25	3	7	3	7	-25	51	-13	-13	3	3	-1
14						3	-1	3	3	-25	7	-13	51	-13	7	-25	3
15						7	3	-25	-1	3	3	-13	-13	51	-25	7	3
16						3	3	-1	-25	3	7	3	7	-25	51	-13	-13
17						7	-25	3	3	-1	3	3	-25	7	-13	51	-13
18						-25	7	3	7	3	-25	-1	3	3	-13	-13	51

(表 7)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6						100	0	0	0	0	0	-50	20	20	10	10	
7						0	100	0	0	-100	0	-10	0	0	10	-50	
8						0	0	100	-100	0	20	10	0	0	50	-10	
9						0	0	-100	100	0	-20	-10	0	0	-50	10	
10						0	-100	0	0	100	0	10	0	0	-10	50	
11					11+12	0	0	20	-20	0	52	26	0	0	10	6	
12						-50	-10	10	-10	10	26	51	-10	-10	3	3	
13					13+16	20	0	0	0	0	0	-10	52	-12	-6	26	
14					14+15	20	0	0	0	0	0	-10	-12	52	26	-6	
15						10	10	50	-50	-10	10	3	-6	26	51	-13	
16						10	-50	-10	10	50	6	3	26	-6	-13	51	
17																	

(表 8)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6						100	0	0	0	0	0	-50	40	20	10	10	
7					7+10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8					8+9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9						0	0	0	100	0	-20	-10	0	0	-50	10	
10						0	0	0	0	100	0	10	0	0	-10	50	
11						0	0	0	-20	0	52	26	0	0	10	6	
12						-50	0	0	-10	10	26	51	-20	-10	3	3	
13					13+14	40	0	0	0	0	0	-20	80	40	20	20	
14						20	0	0	0	0	0	-10	40	52	26	-6	
15						10	0	0	-50	-10	10	3	20	26	51	-13	
16						10	0	0	10	50	6	3	20	-6	-13	51	
17																	

(表 9)

The matrix $S - (-20)I$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	32	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
2	$-3\sqrt{2}$	14	4	4	4	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3
3	$-3\sqrt{2}$	4	14	4	4	2	-3	-3	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3
4	$-3\sqrt{2}$	4	4	14	4	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	2	-3	-3	2
5	$-3\sqrt{2}$	4	4	4	14	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	2
6	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	22	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6
7	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2
8	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1
9	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2
10	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1
11	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6
12	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0
13	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1
14	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1
15	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2
16	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2
17	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22

(表 10).

	1	2 $+8+7+6$	3 $+9+10+11$	4 $+12+13+14$	5 $+15+16+17$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$3\sqrt{2}$	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
2	0	80	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	80	0	0	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	20	20	0	0	0	0
5	0	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20	20
6	$\sqrt{2}$	20	0	0	0	(22)	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6
7	$\sqrt{2}$	20	0	0	0	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2
8	$\sqrt{2}$	20	0	0	0	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1
9	$\sqrt{2}$	0	20	0	0	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2
10	$\sqrt{2}$	0	20	0	0	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1
11	$\sqrt{2}$	0	20	0	0	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6
12	$\sqrt{2}$	0	0	20	0	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0
13	$\sqrt{2}$	0	0	20	0	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1
14	$\sqrt{2}$	0	0	20	0	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1
15	$\sqrt{2}$	0	0	0	20	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2
16	$\sqrt{2}$	0	0	0	20	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2
17	$\sqrt{2}$	0	0	0	20	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22

(表 II)

24

diag (32, 80, 80, 80, 80)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

(表 12)

5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	6	320															
2	6	0															
3	6	0															
4	6	0															
5	6	0															
6	6	0															
7	6	0															
8	6	0															
9	6	0															
10	6	0															
11	6	0															
12	6	0															
13	6	0															
14	6	0															
15	6	0															
16	6	0															
17	6	0															
1	6	320															
2	6	0															
3	6	0															
4	6	0															
5	6	0															
6	6	0															
7	6	0															
8	6	0															
9	6	0															
10	6	0															
11	6	0															
12	6	0															
13	6	0															
14	6	0															
15	6	0															
16	6	0															
17	6	0															

(表 14)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9									460	-180	-90	-180	-90	230	230	-90	-90
10									-180	460	-90	-180	230	-90	-90	230	-90
11									-90	-90	211	230	-93	3	-93	3	115
12									-180	-180	230	460	-90	-90	-90	-90	230
13									-90	230	-93	-90	211	-93	-93	115	3
14									230	-90	3	-90	-93	211	115	-93	3
15									230	-90	-93	-90	-93	115	211	-93	-93
16									-90	230	3	-90	115	-93	-93	211	-93
17									-90	-90	115	230	3	3	-93	-93	211

(表 15)

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9									
14-15	192	-192	0	0	96	-96	-96	96	0
10									
12-16	-192	192	0	0	-96	96	96	-96	0
11	0	0	211	-96	-93	3	-93	3	115
12									
11-17	0	0	-96	192	0	-96	96	0	-96
13	96	-96	-93	0	211	-93	-93	115	3
14	-96	96	3	-96	-93	211	115	-93	3
15	-96	96	-93	96	-93	115	211	-93	-93
16	96	-96	3	0	115	-93	-93	211	-93
17	0	0	115	-96	3	3	-93	-93	211

(16)

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9									
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	192	0	0	-96	96	96	-96	0
11	0	0	211	-96	-93	3	-93	3	115
12	0	0	-96	192	0	-96	96	0	-96
13	0	-96	-93	0	211	-93	-93	115	3
14	0	96	3	-96	-93	211	115	-93	3
15	0	96	-93	96	-93	115	211	-93	-93
16	0	-96	3	0	115	-93	-93	211	-93
17	0	0	115	-96	3	3	-93	-93	211

(17)

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9			\longleftrightarrow						
10		192	0	0	-96	+96	96	-96	0
11	\uparrow	0	192	-96	0	-96	96	0	-96
12	\downarrow	0	-96	211	-93	3	-93	3	115
13		-96	0	-93	211	-93	-93	115	3
14		96	-96	3	-93	211	115	-93	3
15		96	96	-93	-93	115	211	-93	-93
16		-96	0	3	115	-93	-93	211	-93
17		0	-96	115	3	3	-93	-93	211

(18)
(19)

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9									
10									
11									
12				163	-93	-45	-45	3	67
13				-93	163	-45	-45	67	3
14			\uparrow	-45	-45	115	115	-45	-45
15			\downarrow	-45	-45	115	115	-45	-45
16				3	67	-45	-45	163	-93
17				67	3	-45	-45	-93	163

(16)
(17)

	12	13	14	15	16	17
12	140	70	0	-90	70	140
13	70	163	0	-45	70	140
14	0	0	0	0	0	0
15	-90	-45	0	115	-45	-90
16	70	67	0	-45	163	70
17	140	70	0	-90	70	140

(表 20)